Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 4

Wie bereits auf dem letzten Blatt erwähnt, liefert die Determinante alternative Lösungswege für bestimmte Aufgaben. So sind die Spalten einer quadratischen Matrix linear unabhängig und bilden somit eine Basis genau dann, wenn Determinante dieser Matrix nicht 0 ist. Die inverse Matrix steht im Zusammenhang mit der Kofaktormatrix und für lineare Gleichungssysteme gibt es (falls die Koeffizientenmatrix invertierbar ist) die Cramer'sche Regel.

Weiterhin verwendet man die Determinante, um Eigenwerte und Eigenvektoren auszurechnen. Die Eigenvektoren sind Vektoren, die beim Abbilden mit einer linearen Abbildung ihre Richtung behalten. Es ändern sich nur ihre Länge und der Faktor ist der zugehörige Eigenwert. Findet man sogar eine Basis aus Eigenvektoren, so ist die Darstellungsmatrix bezüglich dieser Basis besonders einfach, nämlich eine Diagonalmatrix.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure" (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 1. Juni 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Zeigen Sie, dass durch $\underline{G} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben ist. Seien

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

in der Standardbasis gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsmatrix die Darstellung von $\boldsymbol{v}$ und B in der Basis $\underline{G}$.

2. Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 11 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 & -\frac{2}{9} \\ -2 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{50} \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & -3 & -3 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 10 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Inverse von A durch die Kofaktormatrix.

(b) Lösen Sie das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ihre (reellen) Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, welcher Diagonalmatrix ist sie ähnlich?